



研究与开发

一种基于增强奇偶校验码级联极化码的新型编译码方法

王燕, 刘顺兰, 奚珍珍, 包建荣

(杭州电子科技大学电子信息学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 极化码作为一种纠错码, 具有较好的编译码性能, 已成为 5G 短码控制信道的标准编码方案。但在码长较短时, 其性能不够优异。提出一种基于增强奇偶校验码级联极化码的新型编译码方法, 在原有的奇偶校验位后设立增强校验位, 对校验方程中信道可靠度较低的信息位进行双重校验, 辅助奇偶校验码在译码过程中对路径进行修剪, 以此提高路径选择的可靠性。仿真结果表明, 在相同信道、相同码率码长下, 本文提出的新型编译码方法比循环冗余校验 (cyclic redundancy check, CRC) 码级联极化码、奇偶校验 (parity check, PC) 码级联极化码误码性能更优异。在高斯信道下, 当码长为 128、码率为 1/2、误码率为 10^{-3} 时, 本文提出的基于增强 PC 码级联的极化码比 PC 码级联的极化码获得了约 0.3 dB 增益, 与 CRC 辅助的极化码相比获得了约 0.4 dB 增益。

关键词: 极化码; 增强奇偶校验; 循环冗余校验; 串行抵消列表算法

中图分类号: TN925

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-0801.2021033

A novel method for encoding and decoding based on enhanced parity-check-concatenated polar codes

WANG Yan, LIU Shunlan, XI Zhenzhen, BAO Jianrong

School of Electronic Information, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China

Abstract: Polar codes have perfect coding and decoding performance as a kind of error correction code, which have become a standard coding scheme for 5G short code control channel. While the length of polar codes is short, its performance is not good enough. A novel method for encoding and decoding based on enhanced parity-check-concatenated polar codes was proposed. The enhanced check bit was set up after the parity-check (PC) bit to check the information bits with low channel reliability again, which could help path metric value prune the decoding path and improve the reliability of decoding path selection. The simulations reveal that the proposed method has better performance than cyclic redundancy check (CRC) concatenated polar codes and PC concatenated polar codes under the same channel, code length and code rate conditions. In additive white Gaussian noise channel, when the code

收稿日期: 2020-07-23; 修回日期: 2021-02-26

通信作者: 刘顺兰, liushunlan@hdu.edu.cn

基金项目: 浙江省自然科学基金资助项目 (No.LY18F010013); 国家自然科学基金资助项目 (No.U1809201)

Foundation Items: Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China (No.LY18F010013), The National Natural Science Foundation of China (No.U1809201)



length is 128, the code rate is 1/2 and the bit error rate is 10^{-3} , the proposed method achieves a gain of about 0.3 dB over the PC codes cascaded polar codes, about 0.4 dB over the CRC assisted polar codes.

Key words: Polar code, enhanced parity check, cyclic redundancy check, successive cancellation list decoding algorithm

1 引言

极化码 (Polar 码) 于 2009 年由 Arikan E 首次提出, 是第一种理论上能达到香农极限的信道编码方法^[1], 并且由于其较低的编码、译码复杂度等优势, 受到了广泛的关注, 成功入选 5G 标准, 作为增强移动宽带场景中控制信道的编码方案^[2-3]。当极化码的长度趋于无穷时, 才能更好地达到信道容量, 然而在中短码长时性能较差。为了提高极化码的纠错性能, 先后提出了许多不同的译码方法。参考文献[1]提出采用串行抵消 (successive cancellation, SC) 译码算法, 由于 SC 译码算法是一种次优的译码算法, 在有限长码长中性能有待提升。在 SC 译码算法的基础上, 参考文献[4]提出串行抵消列表 (successive cancellation list, SCL) 译码算法, 该算法通过扩张译码路径, 增大了译码结果正确的可能性。参考文献[5]提出引入循环冗余校验码与极化码级联, 即 CRC 辅助 SCL 译码算法 (CRC aided SCL, CA-SCL), 有助于在 SCL 译码的列表中挑选出正确的译码结果。此后, 参考文献[6]提出的奇偶校验码级联极化码引入校验比特, 在译码过程中能够实时校验译码路径, 性能可优于 CRC 级联极化码, 不过使用的蒙特卡洛构造方法使得复杂度严重增加。CRC 辅助的 Polar 码和 PC 辅助的 Polar 码已被纳入 5G 极化码标准实现方案^[3]。

Polar 码在不同译码算法下的纠错性能具有差异, 但 Polar 码本身的纠错性能在很大程度上受码构造的影响, 即信息位和冻结位的选取。目前, 针对 AWGN 信道还没有精确的 Polar 码构造方法, 只能对 AWGN 比特信道的可靠度进行估计。常用的方法包括蒙特卡洛构造^[1]、密度进化 (density

evolution, DE) 构造^[7]、高斯近似 (gaussian approximation, GA) 构造^[8]、极化权重 (polarization weight, PW) 构造^[9]、量化方法^[10]等。由于密度进化构造和高斯近似构造都依赖构造时 AWGN 信道的信噪比, 针对不同信噪比的构造结果存在差异。为了得到统一的 Polar 码构造序列, 华为公司提出的极化权重方法是一种独立于信噪比的构造方法, 相对于传统的密度进化和高斯近似, 构造结果具有嵌套性、复杂度较低。

CRC 校验比特只能在译码结束后选择通过校验的路径, 不能在译码过程中提高路径选择的可靠度, 而 PC 校验比特可以弥补这一不足。参考文献[11]提出将两种级联方案结合形成基于 CRC 辅助的 PC 码级联极化码方案。本文在参考文献[11]的基础上, 在奇偶校验位后添加一位重复码校验位。在译码过程中, 对于奇偶校验多次不通过的路径及时删除, 相对于原有的 PC 码辅助的 CA-SCL 译码算法降低了复杂度, 对信道容量较低的信息比特再次进行重复码校验, 辅助路径度量筛选可靠性更高的路径, 译码结束后, 采用 CRC 校验得到最优路径。

2 极化码和其级联方案

极化码是一种基于信道极化理论的信道编码方式。当码长不断增加, 编码端通过码字构造方法后, 各个子信道的信道容量呈现出两级分化的现象: 一部分信道的信道容量趋于 1, 而另一部分的信道容量趋于 0。对于信道容量趋于 1 即可靠度比较高的信道传输信息比特, 而信道容量趋于 0 即可靠度较低的信道传输冻结比特。

对于给定的码长 N , 极化码的编码方式如下:

$$\mathbf{c}_1^N = \mathbf{u}_1^N \mathbf{G}_N \quad (1)$$

其中, $u_1^N = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_N)$ 为信源序列, $c_1^N = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_N)$ 编码后码字序列, G_N 是极化码的生成矩阵, $G_N = B_N F^{\otimes n}$, 其中 B_N 是位反转的转置矩阵, $F^{\otimes n}$ 为克罗内克积, 矩阵 $F \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 。设 A 为对应信息比特信道的索引集合, $A \subset \{1, 2, \dots, N\}$, 信息比特序列记为 u_A , 也叫非固定比特, u_{A^c} 为冻结比特序列, 通常置为 0, 可将式 (1) 改为:

$$c_1^N = u_A G_N(A) \oplus u_{A^c} G_N(A^c) \quad (2)$$

其中, $G_N(A)$ 表示由 A 中元素对应的行构成的 G_N 的子矩阵, $G_N(A^c)$ 同理, $\oplus$ 表示模 2 加。

信源序列 u_1^N 编码得到码字 c_1^N , 使 c_1^N 通过信道 W^N 发送, 并且在信道输出端接收到 $y_1^N = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_N)$, y_1^N 经过译码后生成 u_1^N 的估计值 $\hat{u}_1^N = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3, \dots, \hat{u}_N)$, $\hat{u}_i$ 表示第 i 个译码比特, $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, 当 $\hat{u}_i$ 是冻结比特时, 直接得到 $\hat{u}_i = u_{A^c}$, 当 $\hat{u}_i$ 是信息比特时, 可通过计算式:

$$\hat{u}_i = \begin{cases} 0, L_N^{(i)} \geq 0 \\ 1, \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

生成其 $\hat{u}_i$ 值。其中 $L_N^{(i)}$ 为对数似然比(log likelihood ratio, LLR), 定义为:

$$L_N^{(i)} = \ln \left(\frac{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | u_i = 0)}{W_N^{(i)}(y_1^N, \hat{u}_1^{i-1} | u_i = 1)} \right) \quad (4)$$

上述的 SC 译码过程是串行进行的, 因此容易存在错误传播现象。SCL 译码算法在 SC 算法的基础上引入了保留 L 条路径的思想, 对于每条路径计算路径度量(path metric, PM) [12]:

$$PM_l^{(i)} \triangleq \sum_{k=1}^i \ln(1 + e^{-\left(1 - 2\hat{u}_k[l]\right) L_N^k[l]}), i \in \{1, 2, 3, \dots, N\} \quad (5)$$

其中, l 表示第 l 条路径索引值, $\hat{u}_k[l]$ 表示第 l 条路径中第 k 个译码比特估计值, $L_N^k[l]$ 表示第 l 条路径的对数似然比, $l \in \{1, 2, 3, \dots, L\}$, 在每条路径扩展后都在不可靠的路径上加一个惩罚值 $|L_N^k[l]|$, 因此当译码结束后得到 L 个译码序列, 选取路径度量最小的序列为最终的译码结果。

参考文献[11]提出的基于 CRC 的 PC 码级联极化码(CRC-PC-Polar)方案, 如图 1 所示, CRC 和 PC 码作为外码, 极化码作为内码进行编码, 信息比特 $v_1^M = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_M)$ 经过 CRC 编码器, 得到带有 C 位的循环冗余校验比特的信息序列 $s_1^{M+C} = (s_1, s_2, s_3, \dots, s_{M+C})$, 其次经过 PC 编码, 得到外码码字 $x_1^{M+C+K} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{M+C+K})$, 极化码的信息位上放置外码码字 x_1^{M+C+K} , 冻结位放置冻结比特, 极化码编码后得到码字 c_1^N 。

在接收端, y_1^N 经过 PC 校验辅助的 CA-SCL 译码器, PC 校验比特的译码时通过前面已完成的信息比特经过奇偶校验运算得到, 若 PC 比特前的信息比特译码错误会导致校验比特译码错误从而影响路径度量, 但 PC 校验只能检测奇数个错误, 若 PC 之前的信息比特发生偶数个错误, PC 校验比特并不能检测出来, 因此本文提出在奇偶校验位后增添一位增强校验位, 对信道可靠度较低的信息位再次进行校验, 并形成了相应的基于增强奇偶校验的 CA-SCL 译码算法。

3 基于增强奇偶校验的级联极化码

基于 CRC 的增强奇偶校验码级联极化码(CRC-EPC-Polar)如图 2 所示, 其中编码主要由 3 部分——CRC 编码、增强 PC 编码、Polar 码编码组成, 外码码字 x_1^{M+C+K} 结构如图 3 所示。译码主要采用本文提出的增强 PC 辅助的 CA-SCL 译

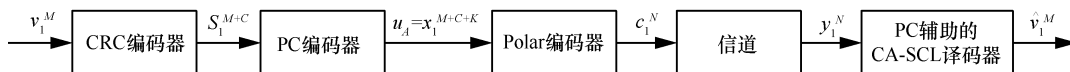


图 1 CRC-PC-Polar 级联方案



码算法。下文主要从编码和译码两个方面详细阐述本文提出的新型编译码方法。

3.1 编码

极化码的构造是编码之前的一个重要部分。本文采取 PW 算法构造估计信道的可靠性, 挑选可靠性较高的信道进行信息比特的传输。设极化信道序号为 i , 令 i 的二进制展开为 $i \triangleq (b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0)$, $n = \text{lb} N$, 该极化信道的极化重量被定义为:

$$W_i = \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^{\frac{1}{4}j}, i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (6)$$

即该信道的可靠度量值, 其中极化重量越大, 表示信道可靠度越高。对任意长度 N , 依次计算 $W_0, W_1, \dots, W_{N-1}$, 并按照从小到大的顺序排列, 取其下标 $I_0^{N-1} = (I_0, I_1, I_2, \dots, I_{N-1})$, 就是可靠度由低到高的信道。例如, 当码长为 8 时, $n = \text{lb} 8 = 3$, 当 $i = 7 (i = 111)$ 时, $W_7 = 1 \times 2^{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} + 1 \times 2^{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} + 1 \times 2^{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)} = 3.6034$ 。根据上述所得到的信道可靠性排序后, 从中挑选 $M+C+Q$ 个可靠性较高的信道传输非固定比特, 其中 $Q=K+R$, K 为奇偶校验比特总数, R 为增强校验比特总数, 一般 $R=K$, 其余信道传输冻结比特。

编码步骤如下: 信息比特 v_1^M 经过 CRC 编码器, 在末尾添加了 C 位的 CRC 校验比特, 得到序列 s_1^{M+C} 。序列 s_1^{M+C} 输入增强 PC 编码器, 得到外码码字 $x_1^{M+C+Q} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{M+C+Q})$, 结构如图 3 所示, 第 k 个 PC 校验比特编码计算式为:

$$x_{p_k} = \left(\sum_{i \in S_k} x_i \right) \bmod 2, k = 1, 2, \dots, K \quad (7)$$

其中, p_k 表示第 k 个 PC 校验比特在外码码字中的索引, 集合 S_k 表示参与第 k 个校验方程的信息比特索引集合, 本文中取从第一个信息比特到第 k 个 PC 校验比特之间所有的信息比特的集合。第 r 个重复校验比特编码计算式为:

$$x_{t_r} = x_j, j \in S_{k_r}, r = 1, 2, \dots, R \quad (8)$$

其中, t_r 表示第 r 个重复校验比特在外码码字中的索引, S_{k_r} 表示第 r 个重复校验比特对应的 S_k , j 为第 r 个校验方程中 PW 最小的信息比特索引, 即在进行奇偶校验时所需校验方程中信道可靠性最低的信息比特。将外码码字 x_1^{M+C+Q} 与冻结比特 u_{A^c} 混合, 外码码字映射到可靠度较高的信道, 其余信道为冻结位, 得到长度为 N 的序列 u_1^N 。根据生成矩阵对编码器的输入序列 u_1^N 进行极化码编码, 得到级联码字 c_1^N , 编码完成。

3.2 译码

CRC 辅助的 SCL 译码算法只有在译码结束后进行校验, 基于增强奇偶校验的级联极化码译码算法弥补了这一不足, 在译码过程中通过引入 PC 校验比特和重复校验比特, 当译码校验比特时, 是根据校验比特所在的校验方程得到的, 相当于一类动态的冻结比特。对于奇偶校验不通过的路径, 记录该条路径的累计错误值, 若该条候选路径的累计错误值达到了所有候选路径累计错误平均值, 则该条候选路径被删除, 相对于原有的 PC

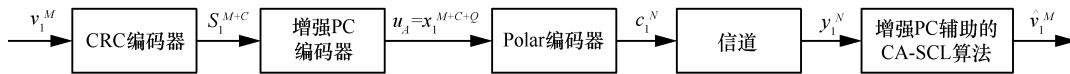


图 2 CRC-EPC-Polar 级联方案

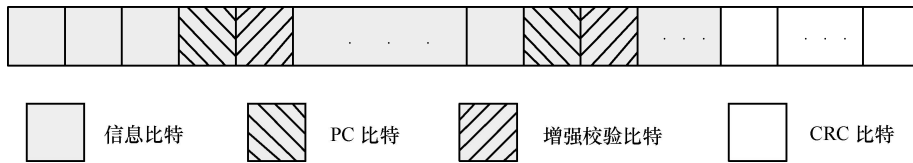


图 3 外码码字 x_1^{M+C+Q} 结构

码辅助的 SCL 译码算法降低了复杂度。其次进行重复比特校验, 辅助路径度量值在译码过程中进行路径选择。假设该路径出现了偶数个译码错误, 即使通过了奇偶校验, 重复校验比特也有可能将该条路径判决为错误, 导致该条路径的路径度量值变大, 在后续的路径选择中很容易被删除, 从

而达到纠错的目的。基于上述分析, 基于增强校验的级联极化码译码算法与 CRC 辅助的 SCL 译码算法具有近似的复杂度, 并且在其译码过程中及时将错误路径进行了删除, 因此复杂度几乎没有增加。基于增强奇偶校验码级联极化码译码算法流程如图 4 所示。

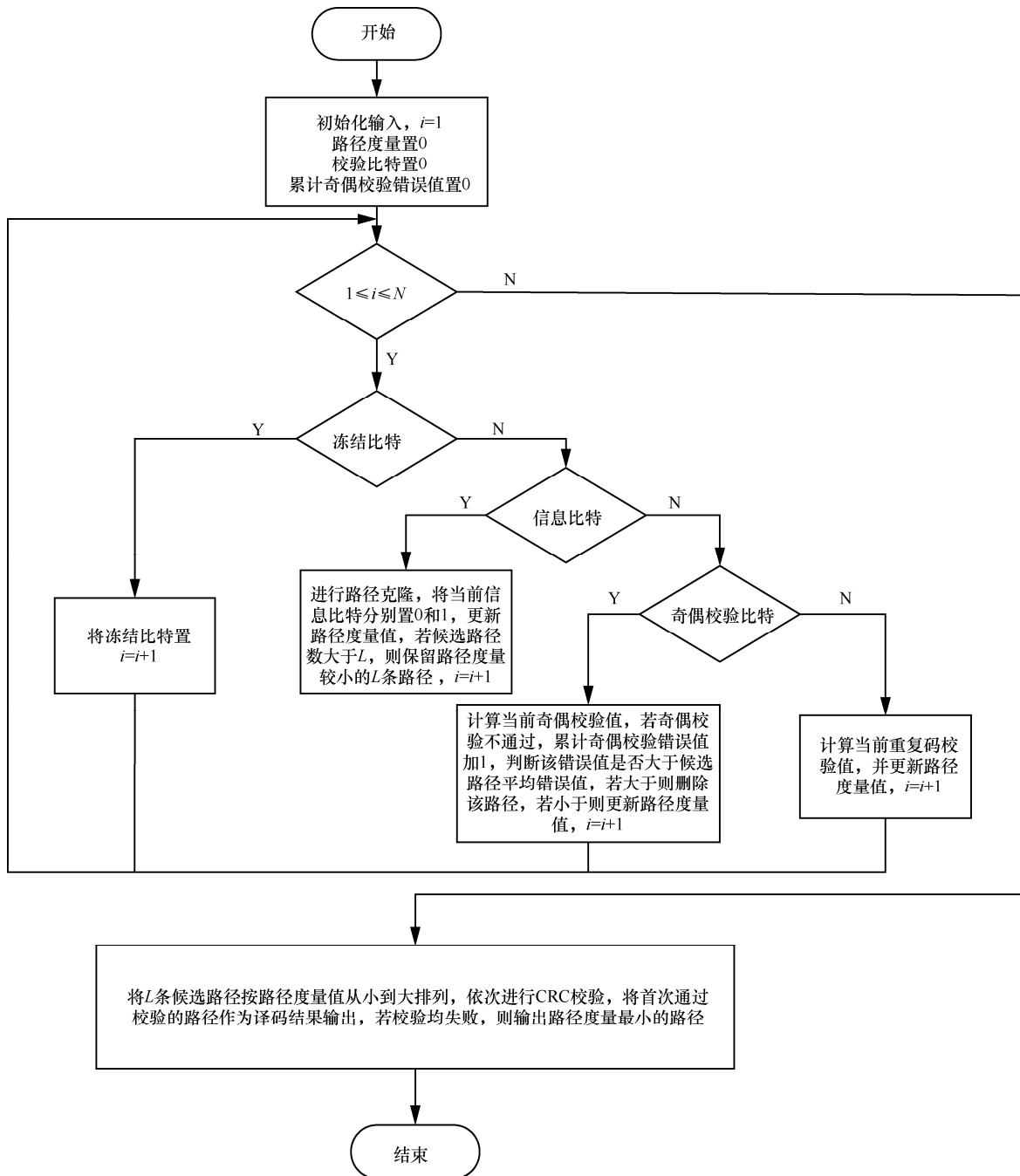


图4 基于增强奇偶校验码级联极化码译码算法流程



3.3 复杂度分析

在编码端, CRC-EPC-Polar 级联方案比 CRC-PC-Polar 级联方案多了增强校验比特的确定, 即选择前一段信息比特中可靠性最低的比特, 由于不涉及复杂的运算, 所以编码复杂度只是微量地增加, 相对于性能的提升是可以接受的。

在译码端, 对于奇偶校验多次不通过的路径及时删除, 提前终止错误路径的传播, 从而避免了这些路径的后续译码过程, 而 CRC-PC-Polar 的译码算法只是通过 PC 校验比特影响路径度量值, 在整个译码过程中还是保留了 L 条路径, 因此 CRC-EPC-Polar 译码算法节省了一部分存储空间, 译码复杂度有所降低。

4 仿真结果和分析

本文在加性高斯白噪声信道下对比了 3 种不同方案的纠错性能。仿真参数见表 1。

表 1 不同方案的仿真参数

级联方案	PC 校验比特 K	重复校验比特 R	CRC 校验比特 C
CRC-EPC-Polar	4	4	8
CRC-PC-Polar	4	0	12
CRC-Polar	0	0	16

其中, CRC-EPC-Polar 表示本文提出的基于 CRC 辅助的增强奇偶校验码级联极化码方案, CRC-Polar 表示参考文献[5]提出的 CRC 辅助的极化码方案, CRC-PC-Polar 表示参考文献[11]提出的 CRC 辅助的基于奇偶校验码级联极化码方案。在译码过程中, 保留路径 $L=16$, 保证每种方案的有效码率相同, 即真实的信息比特与码长的比值相同, 最后根据译码判决结果统计不同方案的误码率 (bit error rate, BER)。

图 5~图 7 分别是码长为 128、256、512, 码率不同时在高斯白噪声信道下的性能比较。由图 5~图 7 可以看出, 在码长相同、码率不同时, 本文提出的基于增强奇偶校验级联极化码方案均

体现出较优异的性能。由图 5 看出, 在码长为 128、码率为 1/2、误码率为 10^{-3} 时, 本文提出的新型编译码方案比基于 CRC-PC 码辅助的级联极化码获得了 0.3 dB 的增益, 比 CRC 辅助的级联极化码获得了 0.4 dB 的增益; 由图 6 看出, 在码长为 256、码率为 1/2、误码率为 10^{-3} 时, 本文提出的新型级联方法较 CRC-PC 级联的极化码获得了 0.2 dB 的增益, 较 CRC 辅助的级联极化码获得了 0.3 dB 的增益; 由图 7 看出, 在码长为 512, 码率、误码率相同时, 本文提出的 CRC-EPC-Polar 方案比 CRC-PC-Polar、CRC-Polar 方案均有着接近 0.1 dB 的增益, 在复杂度不明显增加的情况下, 本文的方案仍然可以借鉴。同时码长相同, 码率越大, 误码率也会越高。

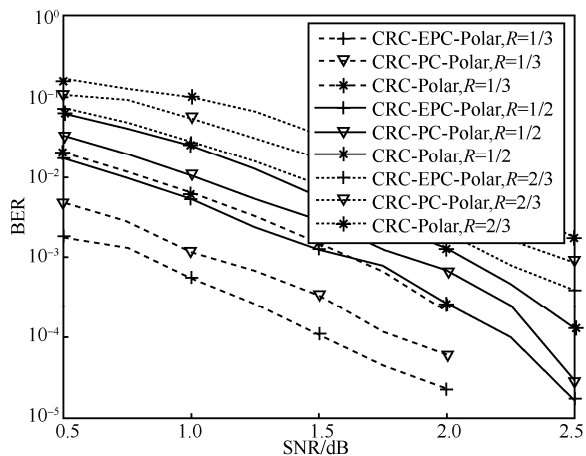


图 5 码长为 128、码率不同时在高斯白噪声信道下的性能比较

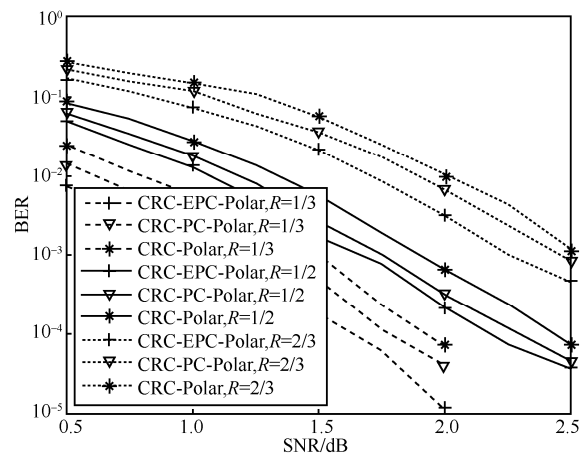


图 6 码长为 256、码率不同时在高斯白噪声信道下的性能比较

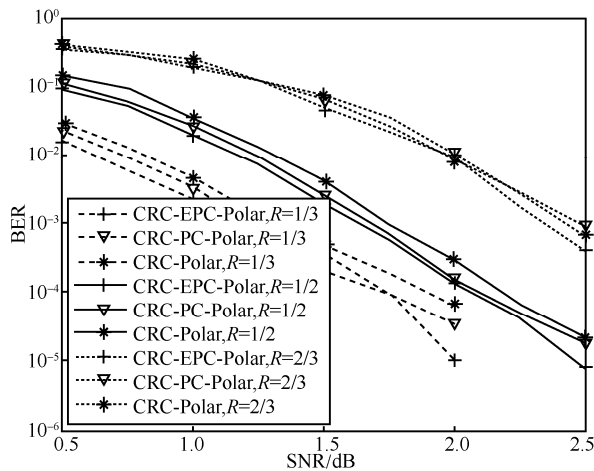


图7 码长为 512、码率不同时在高斯白噪声信道下的性能比较

图 8 是码率为 1/2、码长不同时 3 种级联方案性能对比。由图 8 可以看出，同种方案下，码率相同，码长越长，信道极化效果越好，误码率相对越低。总体而言，本文提出的 CRC-EPC-Polar 级联方案比 CRC-Polar、CRC-PC-Polar 方案性能更优异。

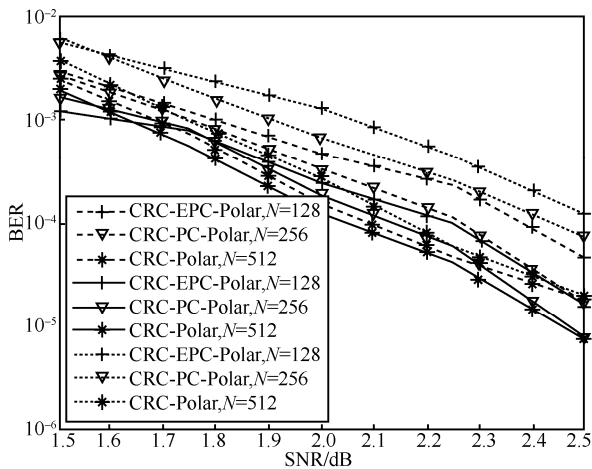


图8 码率为 1/2、码长不同时在高斯白噪声信道下的性能比较

图 9 是码长为 256，码率分别为 1/3、1/2、2/3 时在二进制删除信道（binary erasure channel, BEC）中 CRC-EPC-Polar 级联方案和 CRC-PC-Polar 级联方案的性能比较，其中擦除概率取 0.5。由图 9 可以看出，在 BEC 中，本文提出的级联方案相对于 CRC-PC-Polar 级联方案仍然具有较优异的性能。

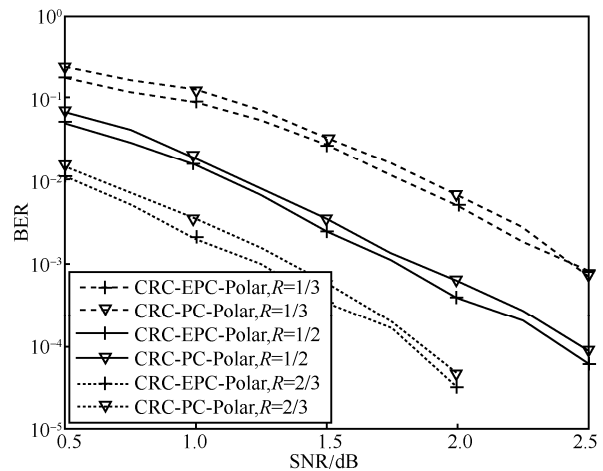


图9 码长为 256、码率不同时在 BEC 下的性能比较

5 结束语

基于 CRC 辅助的极化码和 PC 码辅助的极化码，本文提出了一种增强 PC 码辅助的极化码级联方案，仿真结果显示，在相同信道、相同码长码率下，本文提出的级联极化码比 CRC 级联极化码、CRC-PC 级联极化码更优异，误码性能得到了明显的提升，为解决有限码长性能不佳的问题提供了新思路。

参考文献:

- [1] ARIKEN E. Channel polarization: a method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(7): 3051-3073.
- [2] 3GPP. Multiplexing and channel coding (Release 15): TS 38.212 v15.0.0-2017[S]. 2017.
- [3] 谢德胜, 柴蓉, 黄蕾蕾, 等. 面向 5G 新空口技术的 Polar 码标准化研究进展[J]. 电信科学, 2018, 34(8): 62-75.
XIE D S, CHAI R, HUANG L L, et al. Standardization of 5G new radio technology oriented polar code[J]. Telecommunications Science, 2018, 34(8): 62-75.
- [4] TAL I, VARDY A. List decoding of polar codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(5): 2213-2226.
- [5] NIU K, CHEN K. CRC-aided decoding of polar codes[J]. IEEE Communications Letters: a publication of the IEEE Communications Society, 2012, 16(10): 1668-1671.
- [6] WANG T, QU D, JIANG T. Parity-check-concatenated polar codes[J]. IEEE Communications Letters, 2016, 20(12): 2342-2345.
- [7] MORI R, TANAKA T. Performance of polar codes with the construction using density evolution[J]. IEEE Communications Letters, 2009, 13(7): 519-521.
- [8] TRIFONOV P. Efficient design and decoding of polar codes[J]. IEEE Transactions on Communications, 2012, 60(11): 3223-3236.



3221-3227.

- [9] HE G, BELFIORE J C, LAND I, et al. Beta-expansion: a theoretical framework for fast and recursive construction of polar codes[C]//Proceedings of GLOBECOM 2017 - 2017 IEEE Global Communications Conference. Piscataway: IEEE Press, 2018.
- [10] TAL I, VARDY A. How to construct polar codes[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(10): 6562-6582.
- [11] 李晓磊, 石旭, 周林, 等. 新型级联 Polar 码设计[J]. 信号处理, 2019, 35(3): 204-209.
LI X L, SHI X, ZHOU L, et al. Design of novel cascaded polar codes[J]. Journal of Signal Processing, 2019, 35(3): 204-209.
- [12] BALATSOUKAS-STIMMING A, BASTANI PARIZI M, BURG A. LLR-based successive cancellation list decoding of polar codes[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2014, 63(19): 5165-5179.

[作者简介]



王燕 (1997-), 女, 杭州电子科技大学硕士生, 主要研究方向为无线协作通信、信道编码等。



刘顺兰 (1965-), 女, 杭州电子科技大学教授, 主要研究方向为信息与信号处理、无线通信等。



奚珍珍 (1995-), 女, 杭州电子科技大学硕士生, 主要研究方向为信息与信号处理、无线通信等。



包建荣 (1978-), 男, 博士, 杭州电子科技大学教授, 主要研究方向为空间无线通信、通信信号处理与自主无线电等。